



MINISTERUL
EDUCAȚIEI



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală , 17.02.2024

Clasa a XI-a

Subiectul 1. a) Fie α un număr real și matricea $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Demonstrați că $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$, pentru orice număr natural nenul n .

b) Dacă $B = \begin{pmatrix} \sqrt{6} + \sqrt{2} & \sqrt{6} - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} - \sqrt{6} & \sqrt{6} + \sqrt{2} \end{pmatrix}$, calculați B^{2024} .

Subiectul 2. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$.

a) Arătați că $a_n < 1, \forall n \geq 1$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n)$.

c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n)^n$.

Subiectul 3. a) Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$. Arătați că $A^4 + A^2 + I_2 = O_2$ dacă și numai dacă $A^2 - A + I_2 = O_2$ sau $A^2 + A + I_2 = O_2$.

b) Dați exemplu de o matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A^4 + A^2 + I_2 = O_2$,

$A^2 - A + I_2 \neq O_2$ și $A^2 + A + I_2 \neq O_2$.

Gazeta Matematică 6-7-8/2023, Cezar Apostolescu, Ploiești

Subiectul 4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \{\sqrt{n}\} + \{\sqrt{n+1}\} + \{\sqrt{n+2}\}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (unde notația $\{\cdot\}$ reprezintă partea fracționară).

Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ admite două subșiruri $(x_{k_n})_{n \geq 1}$ și $(x_{j_n})_{n \geq 1}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{k_n}) = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{j_n}) = 1$.

Gazeta Matematică 9/2023, S:L23.226, Daniel Petriceanu, București

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.